

Показательная функция. Степенная функция.

(Методические пособия. 10 класс)

В. А. Мошкина, учитель математики

Методические пособия по зачетным темам «Степенная функция» и «Показательная функция» составлены для учащихся 10 класса очно-заочной формы обучения, не имеющих возможности посещать занятия (каждодневная работа, командировки, семейные обстоятельства, иногородние).

В пособиях кратко, в доступной форме излагается теоретический материал, приводятся примеры с подробным объяснением решений, составлены подобные задания для самостоятельной работы в качестве закрепления. Выполнив эти задания, учащиеся могут проверить ответы, которые даны в конце пособия.

Показательная функция.

План

1. Показательная функция
2. Показательная функция, ее свойства и график.
3. Показательные уравнения.
4. Показательные неравенства.

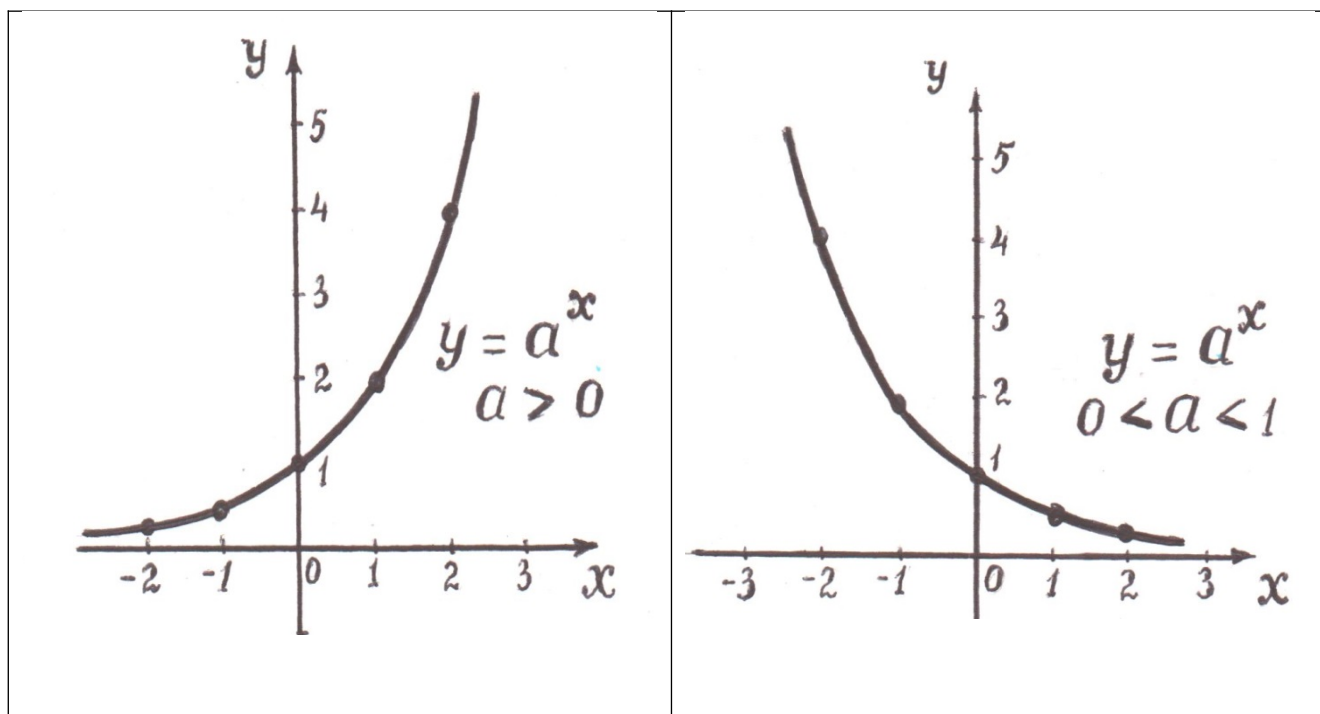
Показательная функция, ее свойства и график.

Определение. Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где a – заданное число такое, что $a > 0$, $a \neq 1$.

Построим графики показательных функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ по точкам.

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

x	-2	-1	0	1	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Свойства показательной функции

Область определения – множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

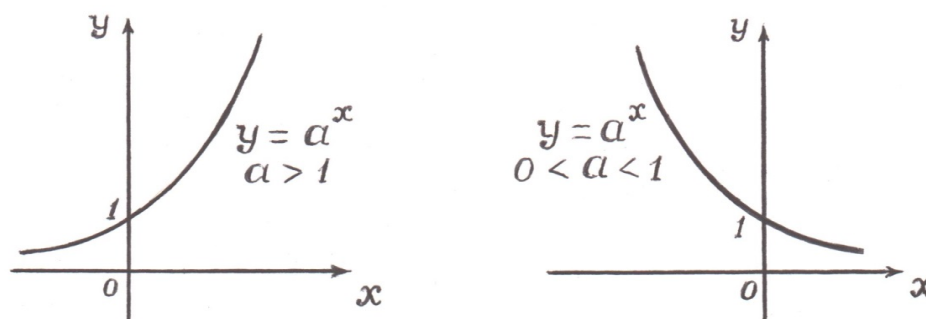
Множество значений функции – множество всех положительных чисел.

Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

Показательная функция является ограниченной снизу.

График любой показательной функции проходит через точку с координатами $(0; 1)$.

График показательной функции $y = a^x$ и можно изобразить схематически



Показательные уравнения

Определение. Показательным называется уравнение, содержащее неизвестное в показателе степени.

Простейшим видом показательного уравнения является уравнение $a^x = b$

Рассмотрим некоторые способы решения показательных уравнений.

Приведение показательных уравнений к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Пример 1. $5^{3x-2} = 5^{10-x}$; $3x - 2 = 10 - x$; $3x + x = 10 + 2$; $4x = 12$; $x = 3$.

Пример 2. $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{7}\right)^{4-5x}$; $\frac{2}{7} = \left(\frac{7}{2}\right)^{-1}$; $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{7}{2}\right)^{5x-4}$; $x^2 = 5x - 4$; $x^2 - 5x + 4 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.

Пример 3. $4 \cdot 2^x = 1$; $2^2 \cdot 2^x = 2^0$; $2^{2+x} = 2^0$; $2 + x = 0$; $x = -2$.

Вынесение общего множителя за скобки.

Пример 4. $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 63$. Вынося в левой части за скобки степень с меньшим показателем 3^{x-2} , получаем $3^{x-2} \cdot (3^2 - 2) = 63$, $3^{x-2} \cdot 7 = 63$, $3^{x-2} = 9$, $3^{x-2} = 3^2$, $x - 2 = 2$, $x = 4$.

Пример 5. $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$, $2^{x-1} \cdot (2^2 + 1 + 2) = 28$, $2^{x-1} \cdot 7 = 28$, $2^{x-1} = 4$, $2^{x-1} = 2^2$, $x - 1 = 2$, $x = 2 + 1$, $x = 3$.

Приведение показательного уравнения к квадратному.

Пример 6. $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$. Представим 7^{2x} как $(7^x)^2$, получим $(7^x)^2 - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

Обозначим 7^x через t , тогда получим: $t^2 - 8t + 7 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = 7$. Так как $7^x = t$, то, подставив вместо t найденные значения, получим два простейших показательных уравнения: 1) $7^x = 1$, $7^x = 7^0$, $x = 0$ и 2) $7^x = 7$, $x = 1$.

Пример 7. $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$. Применив свойства степени, представим уравнение в виде:

$2^2 \cdot 2^x - \frac{2^2}{2^x} = 15$. Замена: $2^x = t$, $4t - \frac{4}{t} = 15$. Так как $t \neq 0$, умножим обе части последнего равенства на t . Получим: $4t^2 - 4 = 15t$, $4t^2 - 15t - 4 = 0$. Решая это уравнение,

находим $t = 4$ или $t = -\frac{1}{4}$. 1) $2^x = 4$, $2^x = 2^2$, $x = 2$.

2) $2^x = -\frac{1}{4}$ - нет решений, так как значение степени не может

быть числом отрицательным.

Ответ: $x = 2$.

Решить уравнения.

$$1) 2^{3x-2} = 16$$

$$2) 17^{x^2-5x+6} = 1$$

$$3) 5^{2x-1} + 5^{2x} = 6$$

$$4) 2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$$

$$5) 3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

$$6) 4^x - 2^{x+3} + 16 = 0$$

3. Показательные неравенства

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенства $a^x > a^b$ или $a^x < a^b$.

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции ($a > 1$) большему значению функции соответствует большее значение аргумента, т. е. $a^x > a^b \Rightarrow x > b$, а для убывающей функции ($0 < a < 1$) большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента, т. е. $a^x > a^b \Rightarrow x < b$.

Пример 1. $3^x < 81$, $3^x < 3^4$. Так как основание $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей, значит, меньшему значению функции будет соответствовать меньшее значение аргумента, т. е. $x < 4$.

Пример 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$. Так как $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ - убывающая функция, в данном случае большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента, т. е.

$x < -\frac{3}{2}$, или $x < -1,5$.

Пример 3. $3^{x^2-x} < 9$, $3^{x^2-x} < 3^2$. Так как $3 > 1$, то $x^2 - x < 2$, $x^2 - x - 2 < 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Возвращаясь к неравенству, получаем $-1 < x < 2$.

Пример 4. $16^x + 4^x - 2 > 0$, $4^{2x} + 4^x - 2 > 0$. Обозначим $4^x = t$, тогда получим квадратное неравенство относительно t : $t^2 + t - 2 > 0$. Найдя корни квадратного трехчлена $t^2 + t - 2$, представим неравенство в виде $(t-1) \cdot (t+2) > 0$. Так как $4^x = t > 0$, то

$t + 2 > 0$, откуда следует, что $t - 1 > 0$, $t > 1$. Возвращаясь к исходному обозначению, получаем $4^x > 1$, которое можно записать в виде $4^x > 4^0$, $x > 0$.

Решить неравенства.

$$1) 4^x < \frac{1}{2}; \quad 2) \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq \frac{1}{9}; \quad 3) 2^{-x^2+3x} < 4; \quad 4) \left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}; \quad 5) 3^{x+2} + 3^{x+1} < 36.$$

Литература. Ю. М. Колягин. Алгебра и начала математического анализа, 10 кл.

Ответы

Решить уравнения:

$$1) x = 2; \quad 2) x_1 = -1, x_2 = 6; \quad 3) x = 0,5; \quad 4) x = 3; \quad 5) x = 2; \quad 6) x = 2.$$

Решить неравенства:

$$1) x < -0,5; \quad 2) x \geq 3; \quad 3) x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty); \quad 4) x \in [-0,5; 1]; \quad 5) x < 1.$$

Степенная функция.

План

I. Степенная функция

2. Степенная функция, ее свойства и график.

3.Взаимно обратные функции.

4.Иррациональные уравнения.

1.Степенная функция, ее свойства и график.

Определение. Функция вида $y = x^p$, где p – действительное число, называется степенной функцией.

Свойства и график степенной функции зависят от показателя p .

Рассмотрим свойства степенной функции $y = x^p$ при различных значениях p .

Показатель $p = 2n$ – четное натуральное число.

Простейшими видами таких функций являются $y = x^2$ и $y = x^4$, графики которых строили по точкам.

Рассмотрим общие свойства функции $y = x^{2n}$, где n – натуральное число:

Область определения функции – все действительные числа $\mathbb{R}$;

Множество значений – все неотрицательные числа, т. е. $y \geq 0$;

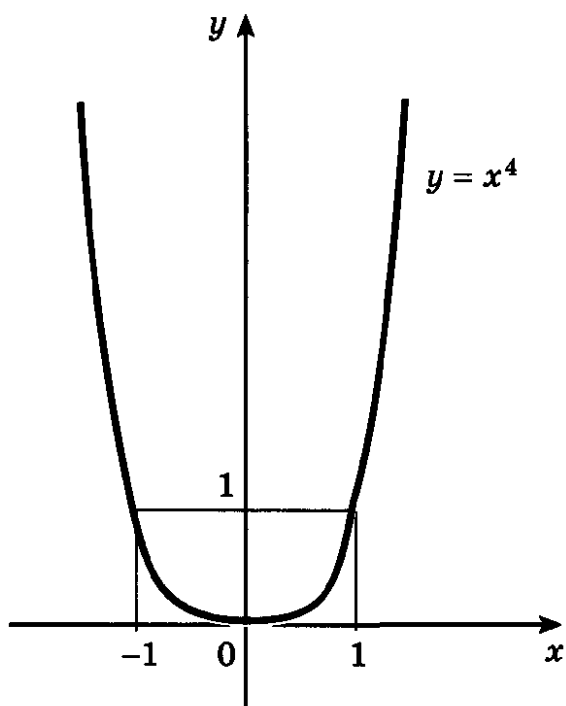
Функция $y = x^{2n}$ четная, т. к. $(-x)^{2n} = x^{2n}$;

Функция является убывающей на промежутке $x \leq 0$ и возрастающей на промежутке $x \geq 0$;

Функция ограничена снизу;

Функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

График функции $y = x^{2n}$ имеет такой же вид, как и график функции $y = x^4$, и его называют параболой.



Показатель $p = 2n - 1$ - нечетное натуральное число.

Рассмотрим общие свойства функции $y = x^{2n-1}$, где n – натуральное число:

Область определения функции – все действительные числа $\mathbb{R}$;

Множество значений – все действительные числа $\mathbb{R}$;

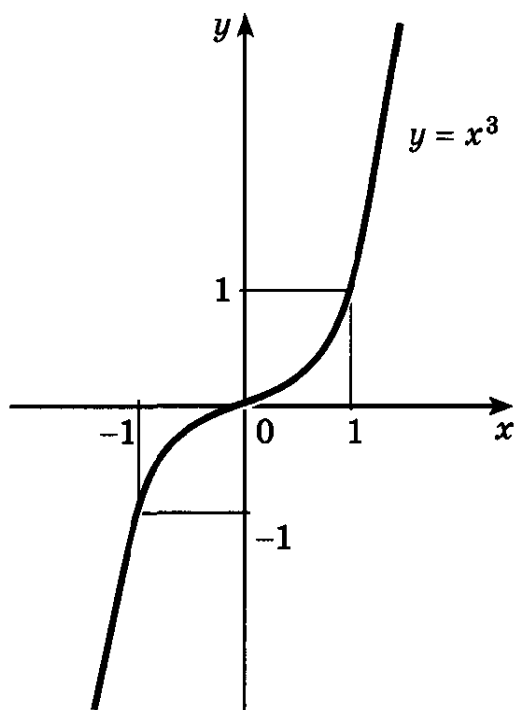
Функция $y = x^{2n-1}$ нечетная, т. к. $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$;

Функция возрастающая;

Функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу;

Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.

График функции $y = x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как и график функции $y = x^3$, его называют кубической параболой.



Показатель $p = -2n$ – нечетное натуральное число.

Рассмотрим общие свойства функции $y = x^{-2n}$, или $y = \frac{1}{x^{2n}}$, где n – натуральное число:

Область определения функции – все действительные числа $\mathbb{R}$, кроме $x = 0$.

Множество значений – множество положительных чисел $y > 0$.

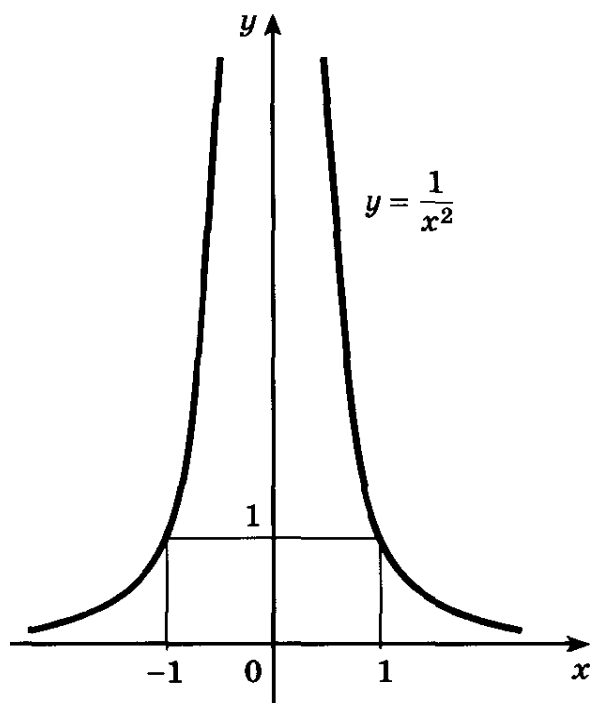
Функция $y = \frac{1}{x^{2n}}$ – четная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}}$.

Функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$.

Функция ограничена снизу: $y > 0$.

Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.

График функции $y = \frac{1}{x^{2n}}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \frac{1}{x^2}$.



4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n - натуральное число.

Рассмотрим общие свойства функции $y = x^{-(2n-1)}$, или $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$, где n - натуральное число:

Область определения функции - все действительные числа $\mathbb{R}$, кроме $x = 0$.

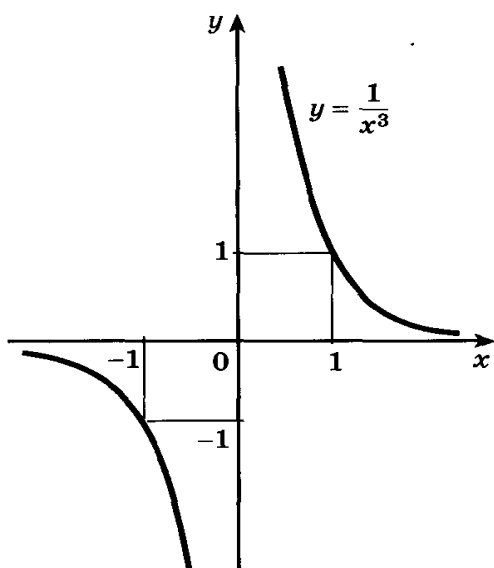
Множество значений - все действительные числа $\mathbb{R}$, кроме $y = 0$.

Функция $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ - нечетная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}$.

Функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.

Функция не является ограниченной.

График функции $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \frac{1}{x^3}$.



2. Взаимно обратные функции

Если задана функция $y = f(x)$, то для каждого значения x из области определения функции можно найти соответствующее значение y . Нередко приходится решать обратную задачу: по данному значению функции y находить соответствующее значение аргумента x .

Примером может служить формула $v = v_0 - gt$, которая выражает зависимость скорости v движения тела, брошенного вверх с начальной скоростью v_0 , от времени движения t . Из

$$t = \frac{v_0 - v}{g}$$

этой формулы можно найти обратную зависимость – времени t от скорости v :

В рассмотренном примере каждому значению функции соответствует одно значение аргумента. В этом случае можно выразить обратную зависимость значений аргумента от значений функции.

Такие функции называют обратимыми.

Определение.

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение только при одном значении x , то эту функцию называют обратимой.

Например, функция $y = 2x + 3$ - обратима, так как каждое свое значение y принимается только при единственном значении аргумента x .

Функция $y = x^2$ не является обратимой, так как, например, значение $y = 4$ принимает при двух значениях аргумента $x = -2$ и $x = 2$.

Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому значению y из множества значений функции соответствует одно определенное значение x из области определения такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y , которую обозначим $x = g(y)$.

В этой записи поменяем местами x и y , получим $y = g(x)$.

Функция $y = g(x)$ – обратная к функции $y = f(x)$.

Значит, чтобы найти функцию, обратную к данной, надо x выразить через y . Затем поменять местами x и y .

Задача 1. Найти функцию, обратную к функции $y = 5x + 3$.

Решим это уравнение относительно x : $y - 3 = 5x$, $x = \frac{y - 3}{5}$. Теперь поменяем местами x и

y : $y = \frac{x - 3}{5}$ – функция, обратная к данной.

Задача 2. Найти функцию, обратную к функции $y = \frac{2}{x - 3}$.

Решая это уравнение относительно x , получаем $x = 3 + \frac{2}{y}$.

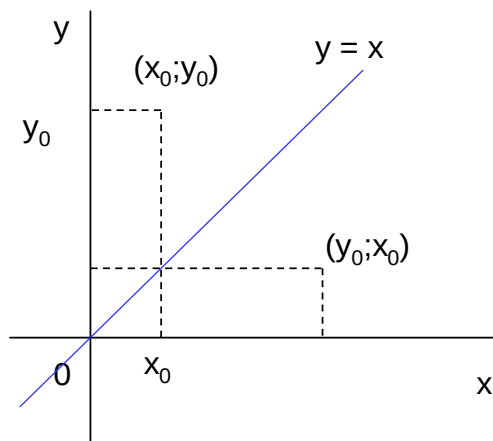
Заменяя x на y и y на x , находим $y = 3 + \frac{2}{x}$.

Из определения обратной функции следует, что область определения обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.

Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Монотонная функция является обратимой.

Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.



Построим графики взаимно обратных функций.

Задача 3. $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$

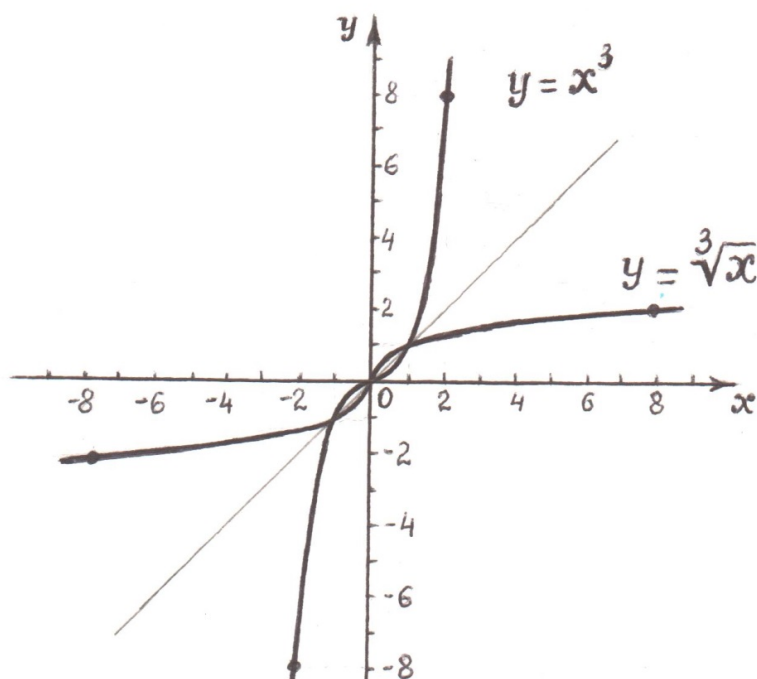
Составим таблицы значений этих функций:

1)

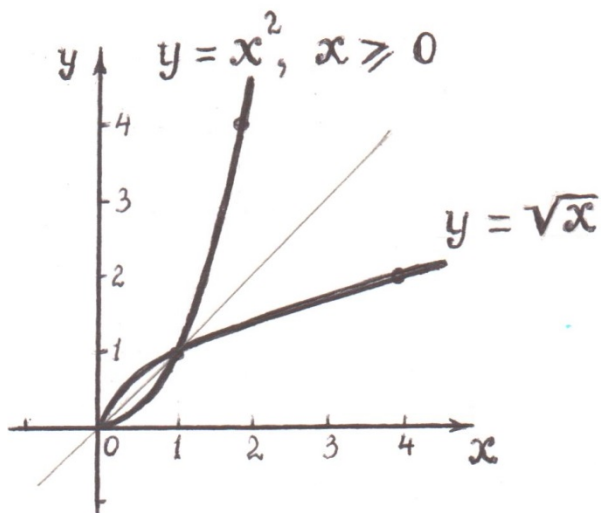
x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

2)

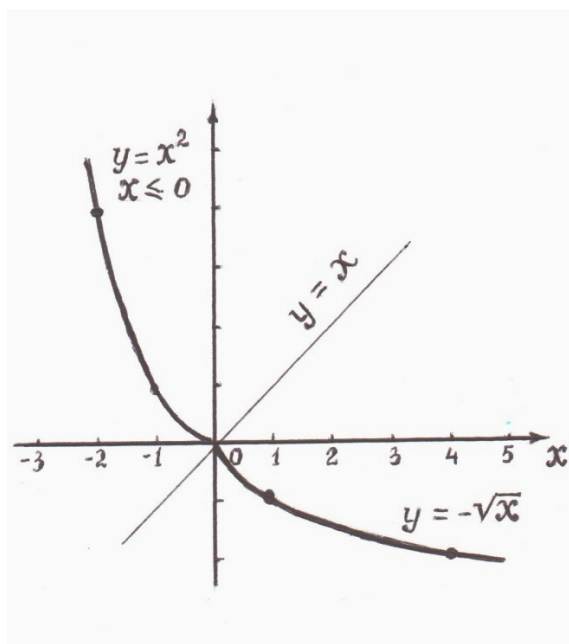
x	-8	-1	0	1	8
y	-2	-1	0	1	2



Задача 4. $y = x^2$, $x \geq 0$ и $y = \sqrt{x}$.



Задача 5. $y = x^2$, $x \leq 0$ и $y = -\sqrt{x}$.



Иррациональные уравнения

В уравнениях $\sqrt{x+1} = x-1$, $\sqrt{5x-4} = 2 + \sqrt{x}$ неизвестная x находится под знаком корня. Такие уравнения называются иррациональными.

Решение иррациональных уравнений основано на следующем свойстве:

При возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение – следствие данного.

При возведении обеих частей уравнения в четную степень может получиться уравнение, не равносильное данному.

Например, 1. $\sqrt{6-x}=x$, $(\sqrt{6-x})^2=x^2$, $6-x=x^2$, $x^2+x-6=0$, $x_1=-3$, $x_2=2$.

Проверка. 1) $x=-3$ - не является корнем уравнения $\sqrt{6-x}=x$, так как при $x=-3$ получается неверное равенство: $3=-3$.

2) $x=2$, $\sqrt{6-2}=2$, $\sqrt{4}=2$, $2=2$ – верно.

Ответ: $x=2$.

2. $\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{x}$, $(\sqrt{x^2+x-1})^2=(\sqrt{x})^2$, $x^2+x-1=x$, $x^2=1$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

Проверка: 1) $x_1=1$, $\sqrt{1+1-1}=\sqrt{1}$, $1=1$ - верно.

2) $x_2=-1$, $\sqrt{1-1-1}=\sqrt{-1}$ - не имеет смысла, так как корень четной степени из отрицательного числа не существует.

Ответ: $x=1$.

Решить самостоятельно

Решить иррациональные уравнения

1) $\sqrt{x-5}=4$; 2) $\sqrt{3x-2}=5$; 3) $\sqrt{67-6x}=7$; 4) $\sqrt{\frac{5}{17-7x}}=\frac{1}{4}$;

5) $\sqrt{\frac{2}{3x-27}}=\frac{1}{3}$.

Ответы: 1) 20; 2) 9; 3) 3; 4) 9; 5) 15.

Литература. Ю. М. Колягин. Алгебра и начала математического анализа, 10 кл.