

Обучение математике через задачи.

Смирнова С.В., учитель математики

В России многие годы традиционно целью образования было овладение системой знаний, составляющих основу наук. При выполнении заданий в практических жизненных ситуациях, содержание которых предоставлено в нестандартной форме, школьники не могут провести анализ, сформулировать вывод, назвать последствия тех или иных изменений, показывают низкие результаты при выполнении заданий связанных с использованием наблюдения, классификации, сравнения, формирования гипотез. Именно этот факт побудил наше правительство предпринять ряд мер, которые помогут поставить математическое образование в России на должный уровень. Это принятие Федерального государственного образовательного стандарта второго поколения, принятие Концепции развития математического образования в Российской Федерации. В Концепции отмечается, что необходимо обеспечить широкий спектр математической активности обучающихся как на уроках, так и во внеурочной деятельности (прежде всего решение логических и арифметических задач, построение алгоритмов в визуальной и игровой среде). Роль задач при обучении математике чрезвычайно велика. С помощью решения текстовых задач можно решить проблему мотивационного характера, о которой так же говорится в Концепции. Текстовые задачи являются важным средством обучения математике. С помощью их учащиеся получают опыт работы с величинами, постигают взаимосвязи между ними, получают опыт применения математики к решению практических задач. Использование исторических задач и разнообразных старинных (арифметических) способов их решения не только обогащает опыт мыслительной деятельности, но и позволяет осваивать важный культурно-исторический пласт истории человечества, связанный с поиском решения задач. Это важный внутренний стимул к поиску решений задач и изучению математики. Если мы научим детей решать задачи - мы не только повысим интерес к самому предмету, но и окажем значительное влияние на формирование их математического мышления, что способствует успешному освоению новых знаний в других областях.

Понимая роль текстовых задач в школьном математическом образовании зная, что важнейшим средством активизации самостоятельной творческой деятельности обучающихся, развития их умственных способностей является решение задач, администрация нашей школы при составлении учебного плана уделила этому вопросу достаточно внимания. Именно поэтому темы элективов, факультативов по математике связаны с решением текстовых задач. Один из пунктов плана мероприятий по реализации Концепции развития математического образования в нашей школе звучит так:

«Организация и проведение элективных и факультативных курсов: факультатив в 8 классе «Решение олимпиадных задач по математике», электив в 11 классе «Задачи прикладного характера военно-спортивного направления», электив «Текстовые задачи: сложности и пути их решения» в 10 классе». (Приложение 1. Рабочая программа элективного курса «Текстовые задачи: сложности и пути их решения»)

Системно-деятельностный подход- основа стандартов второго поколения. «Единственный путь, ведущий к знанию- это деятельность» - утверждал Бернард Шоу. Важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой школьниками усваивается математическая теория, развиваются их творческие способности и самостоятельность мышления, является решение текстовых задач. Не случайно известный педагог математик Д. Пойа пишет: «Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия». В истории использования задач в обучении математике можно выделить следующие этапы:

1)изучение математики с целью обучения решению задач;

2) обучение математике, сопровождаемое решением задач;

3) обучение математике через решение задач.

С изменением роли и места задач в обучении обновляются и сами задачи. Если ранее требование задачи выражалось словами «найти», «построить»; «вычислить», «доказать», то теперь – «объяснить», «выбрать из различных способов решения оптимальный», «выделить все эвристики, используемые при решении задачи», «исследовать», «спрогнозировать различные способы решения» и т. д. Среди функций задач важное место занимает функция управления математической деятельностью школьника, и в частности его развитием. При решении задач важным является эмоциональное восприятие решаемой задачи, которое оказывает активное воздействие на деятельность творческого воображения. Воображение, возникая в ответ на стремление и побуждение учащихся, реализуется в их творческой деятельности

Решая математические задачи, учащиеся не только активно овладевают содержанием курса математики, но и приобретают умения мыслить творчески. Это проявляется в умении видоизменить заданную ситуацию с целью создать условия применимости того или иного метода, приема; в умении выделять и накапливать потенциально полезную информацию; в умении конструировать на базе данной задачи новые; в умении осуществлять самоконтроль, исследовать результат решения.

Современная учебно-методическая литература содержит различные попытки помочь обучающимся в решении задач с помощью формулирования общих приемов, позволяющих найти путь к решению конкретной задачи. Интересны в этом отношении труды известного математика и замечательного педагога Д. Пойа «Как решать задачи», «Математика и правдоподобные рассуждения», «Математическое открытие».

В увлекательной форме Д. Пойа анализирует процесс «математического открытия». Словами «математическое открытие» Д. Пойа характеризует получение любого, сколь угодно скромного, математического результата, например решение нестандартной задачи.

На примерах задач школьного курса процесс решения задач Д. Пойа анализирует в неразрывной связи с процессом обучения решению задач, так что здесь тесно связаны два вопроса: «Как решать задачу?», «Как научить решать задачу?»

Под воздействием книг Д. Пойа последнее время широко применяется метод обучения решению математических задач, который состоит в том, что обучающимся даются общие эвристические схемы процесса решения задач или поиска способа решения, подобных тем, которые приведены в конце книги Д. Пойа «Как решать задачу».

Д. Пойа одним из первых попытался создать теорию, предметом которой являются не математические доказательства, а способы догадываться о таких доказательствах, открывать математические истины и решать математические задачи. Он один из первых наиболее четко и полно сформировал правила, которыми пользуется учитель, желающий научить своих учеников решать задачи.

Всем понятно, что научиться решать задачи обучающиеся смогут лишь решая их. «Решение задач – практическое искусство подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь ... если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их», - утверждал Д. Пойа.

Проведенный анализ выявил две основные причины неудач в обучении решению задач.

Первая причина психологическая. Для того чтобы школьник овладел какой-либо деятельностью, он должен твердо этого захотеть и направить все свои силы и способности

на овладение ею. Основным мотивом решения задач должно быть овладение умениями в этом деле, только тогда эта деятельность станет действительным средством формирования общих умений и способностей в решении любых задач.

Между тем основными мотивами решения задач обучающимися являются внешние мотивы благополучия (чтобы не ругали родители, учителя), оценки и престиж (это уже лучше, т.к. дает хотя бы внешний стимул к активности в процессе решения задач).

Итак, первая задача, которая стоит перед учителем, желающим научить решать задачи, - это подбирать упражнения, вызывающие у обучающихся интерес и желание их решать. Т.к. воля и упорство наиболее полно проявляются, если задача интересна. А особое волевое усилие, которое обучающийся должен проявить, может обеспечить значительные успехи. Учитель должен подбирать такие задачи, чтобы обучающиеся хотели их решать, хотели их сделать задачами «для себя». «Задача становится задачей для вас, когда вы ставите себе целью ее решить, ... если вам очень хочется найти ответ самому, своими собственными силами, то вы сделали задачу действительно вашей, вы относитесь к ней серьезно. Постановка задачи для себя есть начало решения ...» (Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения»).

Вторая причина неудач в обучении решению задач состоит в следующем: решение задач есть сложная умственная деятельность. Для того чтобы сознательно овладеть ею, надо, во-первых, иметь ясное представление об ее объектах и сущности, во-вторых, предварительно овладеть теми элементарными действиями и операциями, из которых состоит эта деятельность, и, наконец, в-третьих, знать основные методы ее выполнения и уметь ими пользоваться.

Положив в основание классификации фабулу задачи, чаще всего выделяют такие группы текстовых задач, как задачи «на движение», «на работу», «на смеси и сплавы», «на смешение и концентрацию», «на проценты», «на части», «на время», «на покупку и продажу» и т.п. Классифицировать задачи можно и по методу решения:

Методы решения текстовых задач.

Существуют различные методы решения текстовых задач: 1) арифметический, 2) алгебраический, 3) геометрический, 4) логический, 5) практический и другие.

В основе каждого метода лежат различные виды математических моделей. Например, при алгебраическом методе решения задачи составляются уравнения или неравенства, при геометрическом — строятся диаграммы или графики. Решение задачи логическим методом начинается с составления алгоритма. Следует иметь в виду, что практически каждая задача в рамках выбранного метода допускает решение с помощью различных моделей. Так, используя алгебраический метод, ответ на требование одной и той же задачи можно получить, составив и решив совершенно разные уравнения, используя логический метод — построив разные алгоритмы. Ясно, что и в этих случаях мы также имеем дело с различными методами решения конкретной задачи, которые будем называть способами решения.

Арифметический метод. Решить задачу арифметическим методом — значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами. Одну и ту же задачу во многих случаях можно решить различными арифметическими способами. Задача считается решенной различными способами, если ее решения отличаются связями между данными и искомыми, положенными в основу решений, или последовательностью использования этих связей.

Алгебраический метод. Решить задачу алгебраическим методом — это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений (или неравенств). Одну и ту же задачу можно также решить различными алгебраическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения составлены различные уравнения или системы уравнений (неравенств), в основе составления которых лежат различные соотношения между данными и искомыми.

Геометрический метод. Решить задачу геометрическим методом — значит найти ответ на требование задачи, используя геометрические построения или свойства геометрических фигур.

Логический метод. Решить задачу логическим методом — это значит найти ответ на требование задачи, как правило, не выполняя вычислений, а только используя логические рассуждения. Примерами таких задач могут служить задачи «на переправы», классическим представителем которых является задача о волке, козе и капусте, или задачи «на взвешивание».

Практический метод. Решить задачу практическим методом — значит найти ответ на требование задачи, выполнив практические действия с предметами или их копиями (моделями, макетами и т.п.).

Иногда в ходе решения задачи применяются несколько методов: алгебраический и арифметический; геометрический, алгебраический и арифметический; арифметический и практический и т.п. В этом случае считают, что задача решается *комбинированным (смешанным) методом*.

Рассмотрим пример задачи, решаемой геометрическим методом.

Геометрический метод. Осуществление плана решения задачи выполняется письменно. Обычно в этом случае описывают и выполняют построение графика или диаграммы. Затем ответы на требование задачи считываются с чертежа (если используется конструктивный прием) или находятся в результате аналитического решения задачи (если используется графико-вычислительный прием).

Задача: Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2 : 3, в другом — в отношении 3: 7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

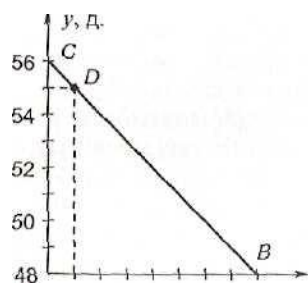
Решение: Математическую модель задачи представим в виде диаграммы (рис. ниже). По горизонтали будем откладывать массу сплава (в килограммах), по вертикали — число долей серебра в сплаве.

Рассмотрим вначале доли какого-либо одного металла в сплаве, например доли серебра. Серебро составляет $\frac{3}{5}$ первого сплава, $\frac{7}{10}$ второго и $\frac{11}{16}$ искомого. Общий знаменатель этих дробей — 80, Следовательно, на каждые 80 частей в первом сплаве приходится 48 частей серебра, во втором — 56 частей, в искомом — 55 частей.

Проведем горизонтальный отрезок АВ, изображающий 8 кг (массу искомого сплава). По вертикали для уменьшения размера чертежа наносим на луче АС деления, начиная не с нуля, а с 48 (48 — наименьшее число долей серебра в сплавах). Соединяем прямолинейным отрезком точки В (8 кг) и С (56 долей серебра) и проводим через точку с отметкой 55 горизонтальную

прямую до пересечения с BC в точке D , а через D — вертикальную прямую до пересечения с AB в точке E . Отрезки AE и EB указывают ответ: надо взять 1 кг первого сплава (отрезок AE) и 7 кг второго сплава (отрезок EB).

Ответ: 1 кг; 7 кг.



А Е 2 4 6 8 x , кг

Одну и ту же задачу можно также решить различными геометрическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения используются различные построения или свойства фигур.

Задача: Из двух городов A и B , расстояние между которыми 250 км, навстречу друг другу выехали два туриста. Скорость движения первого равна 20 км/ч, второго — 30 км/ч. Через сколько часов туристы встретятся?

Решение:

1-й способ. Математическую модель задачи представим в виде диаграммы. Примем длину одного отрезка по вертикали за 10 км, а длину одного отрезка по горизонтали — за 1 ч. Отложим на вертикальной прямой отрезок AB , равный 250 км. Он будет изображать расстояние между городами. Для удобства проведем еще одну ось времени через точку B . Затем на вертикальных прямых станем откладывать отрезки пути, пройденные каждым туристом за 1 ч, 2 ч, 3 ч и т.д. (рис. 1.1, а). Из чертежа видим, что через 5 ч они встретятся.

2-й способ. В прямоугольной системе координат по горизонтали отложим время движения (в часах), по вертикали — расстояние (в километрах).

Примем длину одного отрезка по вертикали за 10 км, а длину одного отрезка по горизонтали — за 1 ч. Построим графики, характеризующие движение каждого туриста. Движение первого туриста определяется функцией $y = 20x$, второго — $y = 250 - 30x$. Абсцисса точки их пересечения (точки O) указывает, через сколько часов туристы встретятся (рис. 1.1, б). Из чертежа видно, что ее значение равно 5. Ордината указывает, на каком расстоянии от пункта A произойдет встреча. Ее значение равно 100.

3-й способ. Пусть время движения туристов до встречи изображается отрезком OT , а скорость сближения — отрезком OS (рис. 1.1, в). Тогда площадь S прямоугольника OSO_1T (она равна $OS \cdot OT$) соответствует расстоянию между городами A и B (пройденный путь есть произведение скорости движения на время движения). Учитывая, что туристы сближаются каждый час на $20 + 30 = 50$ (км), расстояние между городами равно 250 км, имеем уравнение $250 = 50 \cdot OT$, решив которое находим $OT = 5$ (ч). Итак, туристы встретятся через 5 ч. Ответ: через 5 ч.

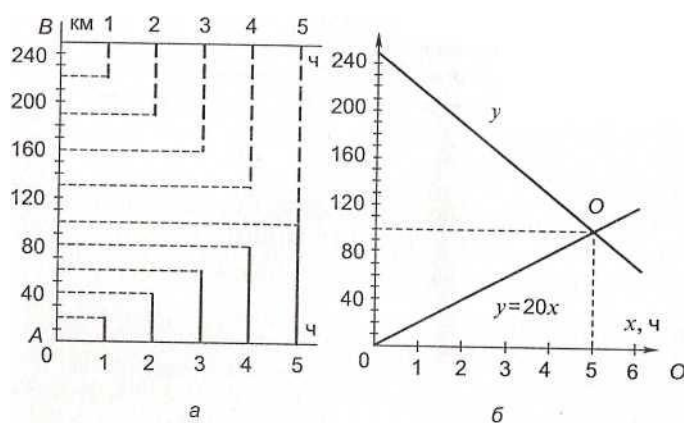
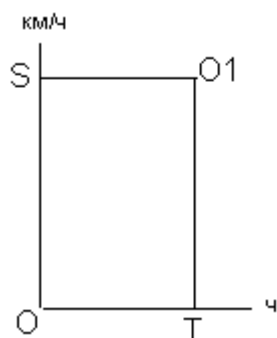


Рис. 1.1



В

Методы решения могут быть разными, но способ решения, лежащий в их основе, может быть один.

Хорошо известны выдвинутые Д. Пойа этапы решения задач:

- 1) Анализ задачи (содержательный и логический).

Схематическая запись условия (с помощью таблицы, математической символики, чертежей ...);

- 2). Поиск способа решения, нахождение теоретической базы решения;
- 3) Осуществление способа (плана) решения;
- 4). Проверка найденного решения. Исследование задачи и найденного решения. Формулирование ответа задачи;
- 5) Учебно-познавательный анализ задачи и её решения.

Первый этап- анализ задачи. Д. Пойа придавал большое значение анализу задачи. Слово «анализ» пришло из древнегреческого языка. Оно означает разбиение, разложение целого на составные части. В этой нехитрой операции и состоит суть анализа. Искусство обучающегося состоит в умении определить, на какие именно части полезно разбить это целое в данном конкретном случае.

Цель анализа – понять задачу, т.е. выделить все множества и отношения, величины и зависимости между ними, числовые данные, лексическое значение слов.

Результатом выполнения этого этапа является понимание задачи, так как с точки зрения психологии восприятие текста – это его понимание. Не поймешь задачу – не решишь ее. Для того чтобы добиться понимания задачи, полезно воспользоваться разными приемами, которые накопились в современной методике.

Приемы выполнения анализа задачи:

- 1)драматизация, обыгрывание задачи;
- 2)разбиение текста задачи на смысловые части;
- 3)постановка специальных вопросов;
- 4)переформулировка текста;
- 5)перефразирование задачи (заменить термин содержанием; заменить описание термином, словом; заменить слово синонимом; убрать несущественные слова; конкретизировать, добавив не меняющие смысл подробности);
- 6)построение модели (схема, рисунок, таблица, чертеж, предметная модель, выражение);
- 7)определение вида задачи и выполнение соответствующей схемы – краткой записи.

Второй этап – поиск плана решения. Долгие годы методисты именно этот этап называли основным, но до него надо еще дойти, добраться. *Цель этапа* – соотнести вопрос с условием.

Данный этап требует рассуждений, но если их осуществлять устно, как часто бывает, то многие дети не освоят умения искать план решения задачи. Нужны приемы графической фиксации подобных рассуждений. Такие приемы, как граф-схема и таблица рассуждений, существуют в российской методике более 100 лет.

Приемы выполнения этапа:

- 1)рассуждения (от условия к вопросу; от вопроса к условию; по модели; по словесному заданию отношений);
- 2)составление уравнения;
- 3)частный подход решения задач, название вида, типа задачи

Третий этап решения задачи – выполнение плана – наиболее существенный этап, особенно при арифметическом решении задачи. *Цель этапа* – выполнить операции в соответствующей математической области (арифметика, алгебра, геометрия, логика и др.) устно или письменно.

Приемы выполнения этапа:

- 1)арифметические действия, оформленные выражением, по действиям (без пояснения, с пояснением, с вопросами);
- 2) измерение, счет на модели;
- 3) решение уравнений;
- 4)логические операции;

Анализ школьной практики свидетельствует, что на уроках математики при решении текстовых задач преимущественное внимание уделяется второму и особенно третьему этапам. Первый этап считается пройденным, если ученики смогли сказать, что в задаче дано, и что нужно найти.

Четвертый этап – проверка выполненного решения. *Цель этапа* – убедиться в истинности выбранного плана и выполненных действий, после чего сформулировать ответ задачи. Установить, правильно ли понята задача, и выяснить, не противоречит ли полученный ответ всем другим условиям задачи. Этот этап является обязательным при решении задач. Следует помнить, что логичные рассуждения на других этапах решения задачи не гарантируют правильности ее решения.

Проверку решения задачи можно проводить различными способами. Перечислим их.

- 1) Установление соответствия между числами, полученными в результате решения задачи и данными в условии задачи.
- 2) Составление и решение задачи, обратной данной.
- 3) Решение задачи различными способами.
- 4) Решение задачи различными методами.
- 5) Прикидка (грубая проверка).

Пятый этап - Учебно-познавательный анализ задачи и её решения.

Цель этапа- воспитать у обучающихся привычку изучать полученное решение. Решив задачу, учитель должен обратить внимание обучающихся на то, чему полезному они научились, решая задачу. Какие новые знания приобрели, что полезно запомнить, а что можно забыть, нельзя ли проверить результат, нельзя ли получить тот же результат иначе, нельзя ли в какой-нибудь задаче использовать полученный результат или метод решения.

Только выполнение всех этих этапов позволяет считать решение текстовой задачи полностью завершённым. Обучение решению задач – это специально организованное взаимодействие учителя и учащихся, цель которого – формирование у обучающихся умения решать задачи. Решение задач – процесс творческий, требующий продуктивной деятельности.

Д. Пойа средством обучения решению задач, средством для нахождения плана решения рассматривает вспомогательные задачи: «Нельзя ли найти связь между данной задачей и какой-нибудь задачей с известным решением? Или с задачей, решаемой проще?»

Учитель, видя затруднения обучающихся при решении задачи, должен сначала сам подбирать вспомогательные задачи. Он должен стремиться к тому, чтобы эти задачи не выглядели произвольными, не имеющими никакой видимой мотивировки или цели, чтобы всем, по возможности, было ясно, почему именно такую вспомогательную задачу привел учитель, чтобы обучающийся, оставшись один на один с задачей, сам мог придумывать и использовать вспомогательные задачи в том случае, если сразу решить задачу не удастся.. С помощью задач обучающимся надо показать, какую роль в математике имеют наблюдения, аналогия, индукция. .

Причина повышенного внимания к использованию текстовых задач в России заключается в том, что в России не только переняли и развили старинный способ передачи с помощью текстовых задач математических знаний и приёмов рассуждений. Научились формировать

с помощью задач важные общеучебные умения, связанные с анализом текста, выделением условий задачи и главного вопроса, составлением плана решения, поиском условий, из которых можно получить ответ на главный вопрос, проверкой полученного результата. Немаловажную роль играло также приучение школьников переводу текста на язык арифметических действий, уравнений, неравенств, графических образов.

Ещё один момент, который невозможно обойти, когда мы говорим о решении текстовых задач. Обучение и развитие во многом напоминает развитие человечества, поэтому использование старинных задач, разнообразных арифметических способов их решения позволяет идти в историческом контексте, что развивает творческий потенциал. Кроме того, разнообразные способы решения будят фантазию детей, позволяют организовать поиск решения каждый раз новым способом, что создаёт благоприятный эмоциональный фон для обучения.

Приложение1

Рабочая программа

элективного курса «Текстовые задачи: сложности и пути их решения»

Раздел I. Планируемые результаты.

Цели и задачи:

научить детей мыслить;

- формировать потребность в исследовательской деятельности;
- развить математические знания, необходимые для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;
- сформировать представление о математике как части общечеловеческой культуры;
- научить анализировать текстовые задачи, разбивать их на составные части;
- повысить культуру решения задач.
- научить детей решать задачи различными способами и методами, что способствует развитию логического мышления у обучающихся, развивает сообразительность, фантазию, интуицию обучающихся.
- научить обосновывать правильность решения задачи, проводить проверку, самопроверку, взаимопроверку, формировать умение пользоваться различными моделями задачи для поиска её решения;
- систематизировать и развивать знания обучающихся о методах, приемах, способах решения текстовых задач, их видах.
- научить составлять уравнение, систему уравнений по условию задачи, описывать выбор переменных уравнения; составлять и обосновывать выбор ответа.
- приобщить учащихся к работе с математической литературой.
- научить составлять математическую модель текстовой задачи, переходить от этой модели к ответам задачи, анализируя жизненную ситуацию текста задачи.

В результате изучения курса обучающиеся должны:

Знать:

- виды текстовых задач;
- способы решения текстовых задач.

Уметь:

- исследовать текстовые задачи;
- записывать краткое условие задачи;
- выбирать подходящее решение для данной текстовой задачи;
- решать простейшие текстовые задачи;

Требования к уровню подготовки учащихся.

После изучения курса обучающие должны

- уметь определять тип текстовой задачи, знать особенности методики её решения, используя при этом разные способы;
- уметь применять полученные математические знания в решении жизненных задач;
- уметь использовать дополнительную математическую литературу с целью углубления материала основного курса
- уметь «рисовать» словесную картину задачи;
- понимать и использовать математические средства наглядности (графики, диаграммы, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;
- ставить к условию задачи вопросы;
- устанавливать взаимосвязь между величинами, данными в тексте задачи;
- составлять план решения задачи, оформлять решение задачи;
- сравнивать решения задач;
- выбирать более удобный способ, метод для решения данной задачи;
- уметь составлять задачу по заданному вопросу, по иллюстрации, по данному решению, по аналогии, составлять обратные задачи;
- уметь решать задачи по возможности разными способами и методами;
- обосновывать правильность решения задачи;
- уметь определять границы искомого ответа.

Раздел II.

Содержание программы

Курс рассчитан на 35 часов (1ч в неделю)

Введение. Текстовые задачи и способы их решения.

Тема 1 . Решение текстовых задач арифметическим способом (4ч)

- 1) задачи на части
- 2) округление с недостатком, округление с избытком,
- 3) задачи, решаемые с конца

Тема 2. Выбор оптимального варианта из двух, трех, четырех возможных вариантов (3ч)

Тема 3. Задачи на движение (8ч)

- 1) задачи на движение по прямой (навстречу и вдогонку);
- 2) задачи на движение по замкнутой трассе;
- 3) задачи на движение по воде
- 4) задачи на среднюю скорость;

Дать основные соотношения, которые используются при решении задач на движение. Рекомендовать составлять таблицу-условие. Рекомендовать составлять рисунок с указанием расстояний, векторов скоростей и других данных задач. Улучшить навыки решения всех типов задач на движение.

Тема 4. Задачи на проценты(6)

- 1) задачи на изменение покупательской способности
- 2) задачи, связанные с банковскими расчетами

Дать основные соотношения, используемые при решении задач на проценты. Дать формулу «сложных процентов». Рекомендовать составлять таблицу-условие. Привить навыки решения задач на основании условия всевозможными способами. Отработать навыки использования формулы при вычислении банковской ставки, суммы вклада, срока вклада, процентный прирост.

Тема 5. Задачи на смеси и сплавы (5).

Преодолеть психологические трудности, связанные с нечетким пониманием химических процессов, показав, что никаких химических процессов, влияющих на количественные соотношения задачи, не происходит. Дать основные допущения, отношения и формулы концентрации, процентного содержания и весового отношения.

Рекомендовать записать условия с помощью таблицы. Привить навыки решения таких задач.

Тема 6. Задачи на совместную работу (3ч)

Дать основные соотношения, используемые при решении задач на производительность. Рекомендовать составлять схемы-условия. Привить навыки решения таких задач при рассмотрении частей всей работы.

Тема 7 Пропорция. Прямо (обратно) пропорциональные величины.(2)

Тема 8. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия.

Решение задач.(4)

Раздел III:

Тематическое планирование материала.

Всего 35 часов, 1 час в неделю

Номер	СОДЕРЖАНИЕ МАТЕРИАЛА	Количество часов	
-------	----------------------	------------------	--

<i>урока</i>			
№1-4	Решение задач арифметическим способом (задачи на округление с недостатком, округление с избытком, «от конца к началу»)	4	
№5-7	Решение задач на выбор оптимального варианта из двух, трех, четырех возможных вариантов.	3	
	Решение задач на движение с помощью уравнений, систем уравнений.	8	
№8,9	Задачи на движение по прямой (навстречу и вдогонку)	2	
№10,11	Задачи на движение по замкнутой трассе	2	
№12-13	Задачи на движение по воде	2	
№14-15	Задачи на среднюю скорость	2	
	Решение текстовых задач на проценты	6	
№16-18	Задачи, связанные с банковскими расчетами.	3	
№19-21	Задачи на изменение покупательской способности	3	
№22-26	Задачи на сплавы и смеси	5	
№27-29	Решение задач на совместную работу	3	
№30-31	Пропорция. Прямо (обратно) пропорциональные величины.	2	
№32-33	Арифметическая прогрессия. Решение задач.	2	

№34-35	Геометрическая прогрессия. Решение задач.	2	

Приложение2.

Примеры решения текстовых задач арифметическим способом. (Задачи решаемые с конца, на совместную работу, на части)

Школьники старших классов обычно, выбирают алгебраический способ решения текстовых задач, к арифметическому практически никогда не возвращаются. Они просто перестают видеть этот способ, увлекаясь введением переменных и составлением уравнений.

За что же мы ценим арифметический способ решения текстовых задач? Первое и главное за то, что при выполнении каждого арифметического действия учащийся задумывается над тем: «А что я нашел в результате?» Он представляет, о чем идет речь в задаче, так как каждое действие имеет наглядное и конкретное истолкование. В результате активно развивается логическое мышление. В процессе вычислений, измерений, поиска решения задач у ученика формируются познавательные универсальные учебные действия, формирование которых является важнейшей задачей современной системы основного общего образования.

Использование арифметических способов решения задач развивает смекалку и сообразительность, умение ставить вопросы, отвечать на них, то есть, развивает естественный язык, готовит школьников к дальнейшему обучению.

Арифметические способы решения текстовых задач позволяют строить план решения с учетом взаимосвязей между известными и неизвестными величинами, истолковывать результат каждого действия в рамках условия задачи, проверять правильность решения с помощью составления и решения обратной задачи, то есть, формировать и развивать важные общеучебные умения и навыки.

Если ученик справляется с текстовыми задачами на уроках математики, то есть может проследить и пояснить логическую цепочку своего решения, дать характеристику всех величин, то он также успешно может решать задачи по физике и химии, он умеет сравнивать и анализировать, преобразовывать информацию на всех учебных предметах школьного курса.

Примеры задач, решаемых с конца.

1. Магия чисел. Я задумал число, прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число я задумал.

Решение.

Решаем задачу с конца:

1)	2	·	7	=	14	–	число	до	деления	на	7.
2)	(14 + 6)	:	4	=	5	–	число	до	умножения	на	4.
3)	5	·	3	=	15	–	число	до	деления	на	3.
4)	15	–	5	=	10	–	искомое число.				

Ответ: задумано число 10.

2. Яблоки. Трое мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый мальчик дает другим столько яблок, сколько каждый из них имеет. Затем второй мальчик дает двум другим столько яблок, сколько каждый из них теперь имеет; а третий дает каждому из двух других столько, сколько есть у каждого в этот момент. После этого у каждого из мальчиков оказывается по 8 яблок. Сколько яблок было у каждого мальчика вначале?

Решение.

Решаем задачу с конца с помощью таблицы.

Номер мальчика	1	2	3
Число яблок в конце	8	8	8
Число яблок до передачи их третьим мальчиком	$8 : 2 = 4$	$8 : 2 = 4$	$8 + 8 + 4 = 16$
Число яблок до передачи их вторым мальчиком	$4 : 2 = 2$	$4 + 2 + 8 = 14$	$16 : 2 = 8$
Число яблок первоначально	$2 + 4 + 7 = 13$	$14 : 2 = 7$	$8 : 2 = 4$

Таким образом, первоначально яблок у первого, второго и третьего мальчиков было соответственно 13, 7 и 4.

Ответ: 13 яблок, 7 яблок, 4 яблока.

3. Черт и бездельник. Однажды черт предложил бездельнику заработать. “Как только ты перейдешь через этот мост, – сказал он, – твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 рубля”. Бездельник согласился и ... после третьего перехода остался без денег. Сколько денег у него было сначала?

Решение.

Так как после третьего перехода у бездельника денег не осталось, то после перехода моста в третий раз у него было 24 рубля, а до перехода третьего моста – 12 рублей. Тогда после перехода второго моста у бездельника было $12 + 24 = 36$ (рублей), а до перехода второго моста – $36 : 2 = 18$ (рублей). Рассуждая аналогично, получим, что после перехода первого моста у бездельника стало $18 + 24 = 42$ (рубля), а перед переходом первого моста – $42 : 2 = 21$ (рубль). Таким образом, у бездельника сначала был 21 рубль.

Ответ: 21 рубль.

4. Туристы. Группа туристов отправилась в поход. В первый день они прошли $1/3$ пути, в второй – $1/3$ остатка, в третий – $1/3$ нового остатка. В результате им осталось пройти 32 км. Сколько километров был маршрут туристов?

Решение.

Так как осталось 32 км, а в третий день туристы прошли остаток, то 32 км будут составлять последнего $2/3$ остатка, тогда сам последний остаток будет равен $32 : 2/3 = 48$ (км). Эти 48 км будут составлять $2/3$ длины маршрута, оставшегося пройти после первого дня. Тогда весь маршрут, который осталось пройти, будет равен $48 : 2/3 = 72$ (км). Эти 72 км составляют вновь $2/3$, но уже всего маршрута туристов, а значит, весь маршрут будет равен $72 : 2/3 = 108$ (км).

Ответ: 108 км

5. Гуси. Над озерами летели гуси. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на семи озерах. Сколько было гусей?

Решение.

Так как на последнем озере сели оставшиеся гуси и больше не осталось, то там сел 1 гусь. Если бы село 2, то 1 гусь остался бы еще. Тогда к шестому озеру подлетало $1 + 12 \cdot 2 = 3$ гуся. А к пятому $3 + 12 \cdot 2 = 7$, к четвертому $7 + 12 \cdot 2 = 15$, к третьему – $15 + 12 \cdot 2 = 31$, ко второму $31 + 12 \cdot 2 = 63$, тогда к первому подлетало $63 + 12 \cdot 2 = 127$ гусей.

Ответ: 127 гусей

6. Крестьянин и царь. Крестьянин пришел к царю и попросил: “Царь, позволь мне взять одно яблоко из твоего сада”. Царь ему разрешил. Пошел крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором. Каждый забор имеет только одни ворота, и около каждого ворот стоит страж. Подошел крестьянин к первому стражу и сказал: “Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада”. “Возьми, но при выходе должен будешь отдать мне половину яблок, что возьмешь, и еще одно”, – поставил условие страж. Это же повторили ему второй и третий, которые охраняли другие ворота. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после того, как отдаст положенные части трем стражам, у него осталось одно яблоко?

Решение.

Перед последними воротами у крестьянина должно остаться $(1 + 1) \cdot 2 = 4$ яблока, перед вторыми – $(4 + 1) \cdot 2 = 10$, и перед первыми – $(10 + 1) \cdot 2 = 22$ яблока.

Ответ: 22 яблока.

7. Лилия на озере. На озере расцвела лилия. Каждый день число цветков удваивалось и на 20-й день все озеро покрылось цветами. За сколько дней покрылась цветами половина озера?

Решение.

Начнем с конца. Так как каждый день число цветков удваивается, а на 20-й день все озеро покрылось цветами, то половина его была покрыта цветами за один день до того, т.е. на 19-й день.

Ответ: за 19 дней.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Это старинная задача. Крестьянка пришла на базар продавать яйца. Первая покупательница купила у нее половину всех яиц и еще половину яйца. Вторая покупательница приобрела половину оставшихся яиц и еще половину яйца. Третья купила всего одно яйцо. После этого у крестьянки не осталось ничего. Сколько яиц она принесла на базар?

2. Задача из книги "Арифметика" Леонтия Магницкого. Отец решил отдать сына в учебу и спросил учителя: "Скажи, сколько учеников у тебя в классе?" Учитель ответил:

"Если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня сто учеников". Сколько же учеников было в классе?

3. Мать купила яблоки. Два из них взяла себе, а остальные разделила между тремя своими сыновьями. Первому она дала половину всех яблок и половину яблока, второму – половина остатка и еще половину яблока, третьему – половину нового остатка и оставшуюся половину яблока. Сколько яблок купила мать, и сколько яблок получил каждый из сыновей?

4. Поставили самовар, а потом 7 раз садились пить чай и каждый раз выпивали половину имеющейся в нем воды. Оказалось, что после этого остался всего стакан воды. Сколько воды было в самоваре перед чаепитием?

5. Я задумал число, отнял 57, разделил на 2 и получил 27. Какое число я задумал?

6. На праздник купили торт. Но ели его очень интересно – к торту подходил человек и съедал половину того, что осталось. Всего торт ели 5 человек, а пришедшему последним (пятым) Стасу, отдали все, что осталось – полкило торта. Сколько весил торт в начале?

7. Некто прогулял $\frac{1}{4}$ урока. На следующий день он прогулял половину урока. Каждый день количество прогулянных уроков увеличивалось в два раза. На десятый день он впервые прогулял все уроки. На какой день он прогулял четверть уроков, если их количество в каждый день одинаково.

8. Хулиган Леша с занятия украл много спичек. По дороге другие ребята увидели его и каждый забрал у него несколько. Вова забрал треть, Вася – треть оставшихся, Гриша – еще треть оставшихся, Толя – тоже треть оставшихся. В итоге Леша сжег 16 спичек, и у него после этого спичек не осталось.

Задачи на производительность труда.

1.Первая бригада может выполнить задание за 20ч, а вторая – за 30ч. Сначала бригады выполнили при совместной работе $\frac{3}{4}$ задания, а остальная часть задания выполнила одна первая бригада. За сколько часов было выполнено задание?

Задачи на производительность труда менее понятны. Поэтому здесь необходим детальный анализ каждого шага.

1)Если первая бригада работает одна, то она выполнит задание за 20ч – это означает, что каждый час она выполняет $\frac{1}{20}$ всего задания.

2)Аналогично рассуждая, получаем производительность труда для второй бригадой - $\frac{1}{30}$ всего задания.

3)Сначала, работая вместе, бригады выполнили $\frac{3}{4}$ всего задания. А сколько же времени они затратили? $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$. То есть, за один час совместной работы обе бригады выполняют двенадцатую часть задания.

4)Тогда $\frac{3}{4}$ задания они выполняют за 9 часов, так как $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ (по основному свойству дроби).

5)Осталось выполнить $\frac{1}{4}$ задания, но уже только первой бригаде, которая за 1 час выполняет $\frac{1}{20}$ всего задания. Стало быть первой бригаде надо работать 5 часов, чтобы довести дело до конца, так как $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

6)Окончательно имеем, $5 + 9 = 14$ часов.

За 14 часов будет выполнено задание.

Задача 2

Одну овцу лев съел за 2 дня, волк за 3 дня, собака за шесть дней. За сколько дней они вместе съедят овцу?

Решение

1. Так как лев съел овцу за 2 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{2}$ овцы.
 2. Так как волк съел овцу за 3 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{3}$ овцы.
 3. Так как собака съела овцу за 6 дней, то за 1 день она съела $\frac{1}{6}$ овцы.
 4. Вместе лев, волк и собака за 1 день съедят $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, то есть 1 овцу.
-

Задачи по теме « Натуральные числа ».

1. Летом у меня целые сутки было открыто окно. В первый час влетел 1 комар, во второй – 2 комара, в третий – 3 и т.д. Сколько комаров влетело за сутки?

Здесь используется метод разбивания всех слагаемых на пары. Первое с последним; второе с предпоследним и т.д., найти сумму каждой пары слагаемых и умножить на количество пар.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 23 + 24 = (1 + 24) + (2 + 23) + \dots + (12 + 13) = 25 \cdot 12 = 300.$$

Влетело 300 комаров.

2. Гости спросили: сколько лет исполнилось каждой из сестёр? Вера ответила, что ей и Наде вместе 28 лет; Наде и Любе вместе 23 года, а всем троим 38 лет. Сколько лет каждой сестре?

1. $38 - 28 = 10$ (лет) – Любе;

2. $23 - 10 = 13$ (лет) – Наде;

3. $28 - 13 = 15$ (лет) – Вере.

Любе 10 лет, Наде 13 лет, Вере 15 лет.

3. В нашем классе 30 учащихся. На экскурсию в музей ходили 23 человека, в кино – 21, а 5 человек не ходили ни на экскурсию, ни в кино. Сколько человек ходили и на экскурсию, и в кино?

1. $30 - 5 = 25$ (чел.) – ходили в кино, или на экскурсию;

2. $25 - 23 = 2$ (чел.) – ходили только в кино;

3. $21 - 2 = 19$ (чел.) – ходили и в кино, и на экскурсию.

19 человек ходили и в кино, и на экскурсию.

4. Некто имеет 24 купюры двух видов – по 100 и 500 рублей на сумму 4000 рублей. Сколько у него купюр по 500 рублей?

Поскольку полученная сумма, число «круглое», то следовательно, количество купюр по 100 рублей кратно 1000. Таким образом, количество купюр по 500 рублей тоже кратно 1000. Отсюда имеем – по 100 рублей 20 купюр; по 500 рублей – 4 купюры.

У некто 4 купюры по 500 рублей.

5. Дачник пришёл от своей дачи на станцию через 12 минут после отхода электрички. Если бы он на каждый километр тратил на 3 минуты меньше, то пришёл бы как раз к отходу электрички. Далеко ли от станции живёт дачник?

Тратя на каждый километр на 3 минуты меньше, дачник мог бы сэкономить 12 минут на расстоянии $12 : 3 = 4$ км.

Дачник живёт в 4 км от станции.

6. Родник в 24 минут даёт бочку воды. Сколько бочек воды даёт родник в сутки?

Поскольку надо обойти дробь, то не надо находить, какую часть бочки наполняют за 1 минуту. Узнаем, за сколько минут наполнится 5 бочек: за $24 \cdot 5 = 120$ минут, или 2 часа. Тогда за сутки наполнится в $24 : 2 = 12$ раз больше бочек, чем за 2 часа, то есть $5 \cdot 12 = 60$ бочек.

Родник даёт в сутки 60 бочек.

7. На некотором участке меняют старые рельсы длиной 8 м на новые длиной 12 м. Сколько потребуется новых рельсов вместо 240 старых?

На участке длиной 24 м вместо 3 старых рельсов положат 2 новых.

Рельсы заменят на $240 : 3 = 80$ таких участках, а положат на них $80 \cdot 2 = 160$ новых рельсов.

Потребуется 160 новых рельсов.

8. В булочной было 654 кг чёрного и белого хлеба. После того как продали 215 кг чёрного и 287 кг белого хлеба, того и другого сорта хлеба осталось поровну. Сколько килограммов чёрного и белого хлеба в отдельности было в булочной?

- 1) $215 + 287 = 502$ (кг) – продали хлеба;
- 2) $654 - 502 = 152$ (кг) – хлеба осталось продать;
- 3) $152 : 2 = 76$ (кг) белого (и чёрного) хлеба осталось продать;
- 4) $215 + 76 = 291$ (кг) – чёрного хлеба было первоначально;
- 5) $287 + 76 = 363$ (кг) – белого хлеба было первоначально.

291 кг чёрного хлеба было первоначально и 363 кг белого хлеба было первоначально.

Приложение 3. Задачи на части.

Рассмотрим задачи, для решения которых некоторую величину надо принять за одну или несколько частей.

При решении таких задач полезно рисовать схематические рисунки, облегчающие решение.

Задача 1. На трех полках 47 книг. На средней полке на 4 книги меньше, чем на верхней, и на 2 книги больше, чем на нижней полке. Сколько книг на верхней полке?

Сделаем схематический рисунок, отражающий условие задачи

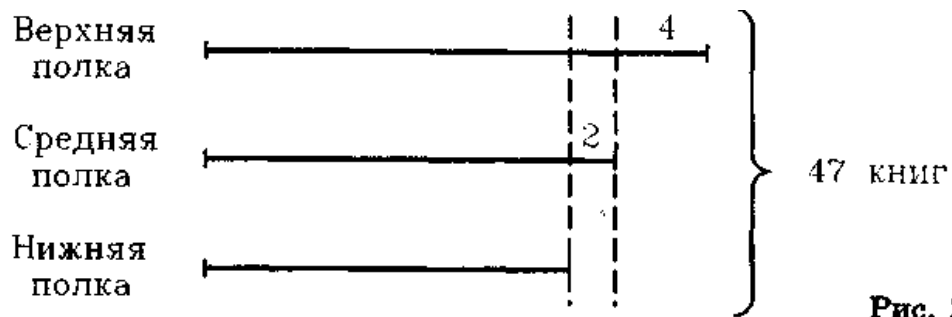


Рис. 25

Если на среднюю полку добавить 4 книги, а на нижнюю 6 книг, то на всех полках книг станет поровну — столько, сколько на верхней полке. Всего мы добавили 10 книг, значит, теперь на трех полках $47 + 10 = 57$ книг. А на верхней полке $57 : 3 = 19$ книг.

Задача 2. Мама в 3 раза старше сына, а папа на 4 года старше мамы, всем вместе 81 год. Сколько лет папе?

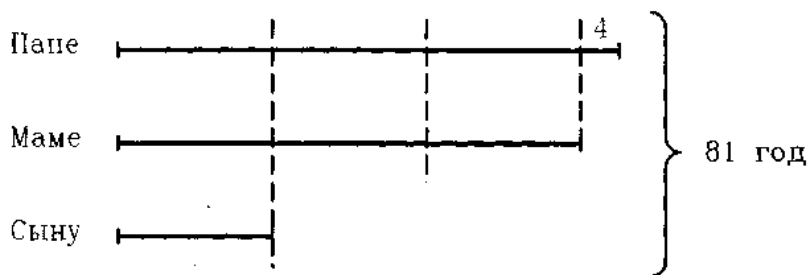


Рис. 26

Если бы возраст папы был на 4 года меньше, то всем вместе было бы $81 - 4 = 77$ лет. Если возраст сына принять за 1 часть, то возраст мамы составит 3 части, папы — 3 части, то есть 77 лет приходится на 7 частей. Поэтому

$$77 : 7 = 11 \text{ (лет)} \text{ — возраст сына;}$$

$$11 \cdot 3 + 4 = 37 \text{ (лет)} \text{ — возраст папы.}$$

Задача 3. Для награждения победителей математической олимпиады школа купила 30 книг по 2 тыс. р. и по 2,5 тыс. р. — всего на 66,5 тыс. р. Сколько тех и других книг куплено?

Пусть сначала за все книги заплатили по 2 тыс. р., т.е. $2 \cdot 30 = 60$ (тыс. р.). После этого надо доплатить за более дорогие книги $66,5 - 60 = 6,5$ (тыс. р.). За каждую надо доплатить $2,5 - 2 = 0,5$ (тыс. р.). Тогда более дорогих книг было $6,5 : 0,5 = 13$, а более дешевых $30 - 13 = 17$.

Таким образом, купили 17 книг по 2 тыс. р. и 13 книг по 2,5 тыс. р.

Рассмотрим задачу, в которой явно упоминаются части некоторой величины. Такие задачи обычно решаются с помощью простых рассуждений.

Задача 4. Для варенья из малины на 2 части ягод берут 3 части сахара. Сколько сахара следует взять на 6 кг ягод?

Решение. По условию задачи ягод 6 кг, и это количество составляет 2 части, поэтому на каждую часть приходится $6:2 = 3$ кг. Сахара надо взять 3 такие же части, т. е. $3 \cdot 3 = 9$ кг. Ответ: 9 кг.

Задача 5. На двух полках стоит 120 книг — на первой полке в 3 раза больше, чем на второй. Сколько книг стоит на каждой полке?

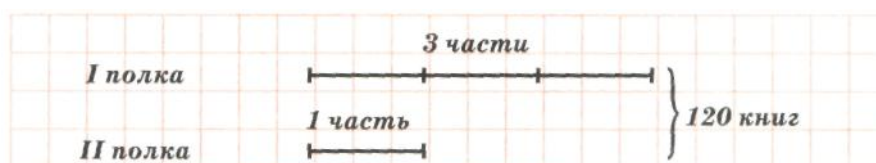


Рис. 20

Решение. Если книги, стоящие на второй полке, составляют 1 часть, то на первой полке — 3 такие части. Выполним схематический рисунок (рис. 20).

- 1) Сколько частей составляют 120 книг?
 $1 + 3 = 4$ (части).
 - 2) Сколько книг приходится на 1 часть (стоят на II полке)?
 $120:4 = 30$ (книг).
 - 3) Сколько книг стоит на I полке? $30 \cdot 3 = 90$ (книг).
- Ответ: 90 и 30 книг.

Задача 6. За рубашку папа заплатил на 120 р. больше, чем за галстук. Известно, что рубашка дороже галстука в 4 раза. Сколько стоит рубашка?

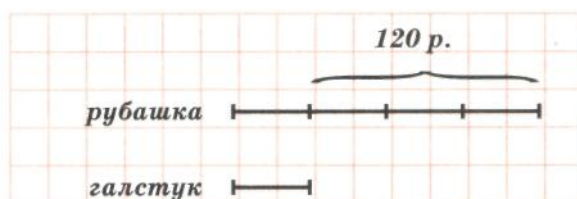


Рис. 21

Решение. Если стоимость галстука составляет 1 часть, то стоимость рубашки составляет 4 такие же части (рис. 21).

- 1) $4 - 1 = 3$ (части) — приходится на 120 р.;

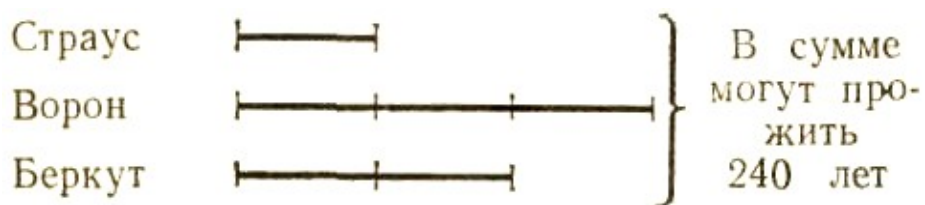
- 2) $120 : 3 = 40$ (р.) — приходится на 1 часть (стоит галстук);
3) $4 - 40 = 160$ (р.) — стоит рубашка. Ответ: 160 р.

Задачи для самостоятельного решения.

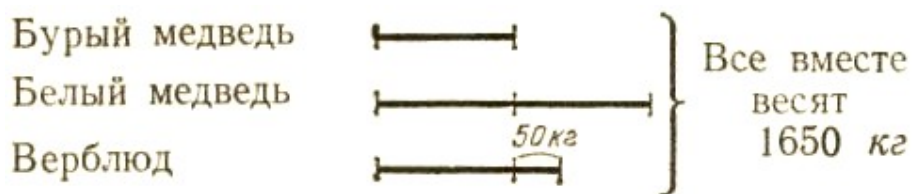
1. Для компота взяли 6 частей яблок, 5 частей груш и 3 части слив. Оказалось, что груш и слив вместе взяли 2 кг 400 г. Сколько взяли яблок? Сколько всего взяли фруктов?
2. а) При изготовлении кофейного напитка «Ячменный» на 4 части ячменя берут 1 часть цикория. Сколько пачек напитка изготовлено, если каждая пачка весит 250 г и на изготовление всей партии напитка израсходовано ячменя на 36 кг больше, чем цикория?
б) При изготовлении кофейного напитка «Наша марка» на 7 частей кофе берут 6 частей цикория, 5 частей желудей и 2 части каштанов. Сколько пачек напитка изготовлено, если каждая пачка весит 200 г, а кофе и цикория вместе израсходовали 26 кг?
3. а) Сплав содержит 1 часть свинца и 2 части олова. Во сколько раз в этом сплаве олова больше, чем свинца? б) Сплав содержит олова в 3 раза больше, чем свинца. Сколько частей олова приходится на 1 часть свинца?
4. а) Девочка прочитала в 3 раза больше страниц, чем ей осталось прочитать. Известно также, что она прочитала на 78 страниц больше, чем ей осталось прочитать. Сколько страниц прочитала девочка?
б) Книга дороже тетради в 3 раза, а тетрадь дешевле книги на 12 р. Сколько стоит книга?
5. *Задача С. А. Рачинского.* Я провел год в деревне, в Москве и в дороге — и притом в Москве в 8 раз более времени, чем в дороге, а в деревне в 8 раз более, чем в Москве. Сколько дней провел я в дороге, в Москве и в деревне?

Приведем примеры диаграмм для составления условия задач и их решения:

1)



2)



3)

